Vorkurs 23.2.2024

(i) Zwei lineare Gleichungen

Lösen von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten

- Wertepaar (x, y), das beide Gleichungen erfüllt
- Punkt $(x | y)$, der auf beiden Geraden liegt, die durch die zwei linearen Gleichungen dargestellt werden

1. Fall:

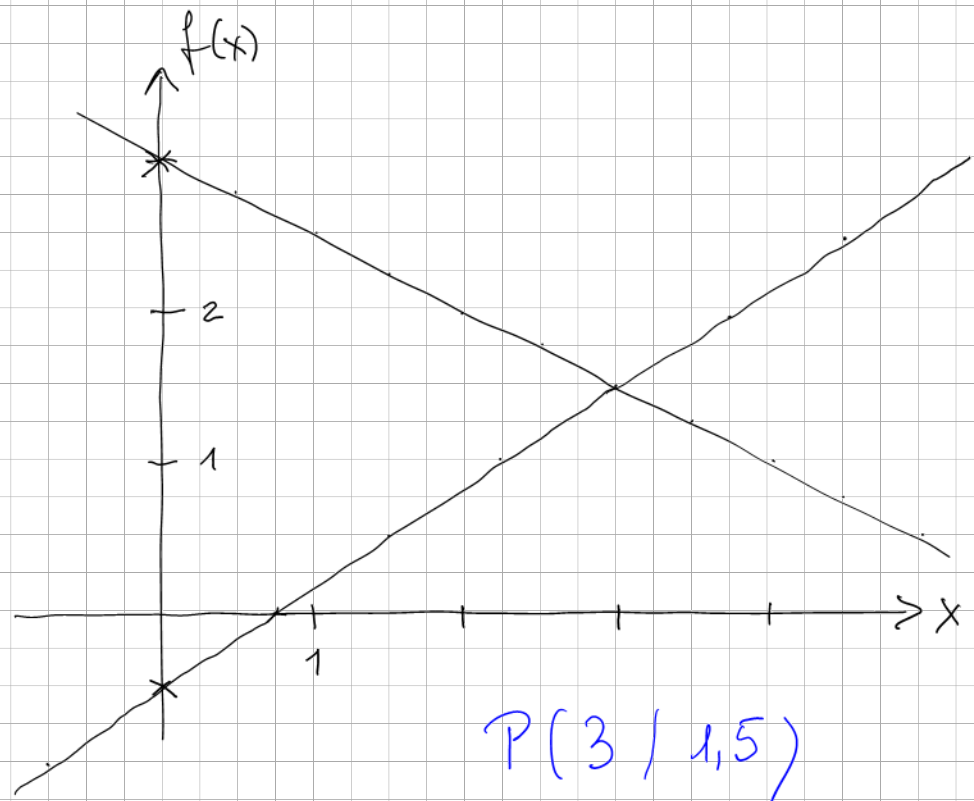
$$-4x + 6y = -3$$
$$x = -2y + 6$$

Auflösen nach y liefert:

$$y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$$
$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

verschiedene Steigungen,

daher ein gemeinsamer Punkt



P(3 / 1,5)

2. Fall:

$$2y = -4 + 3x$$
$$2y = 2 + 3x$$

Auflösen nach y liefert

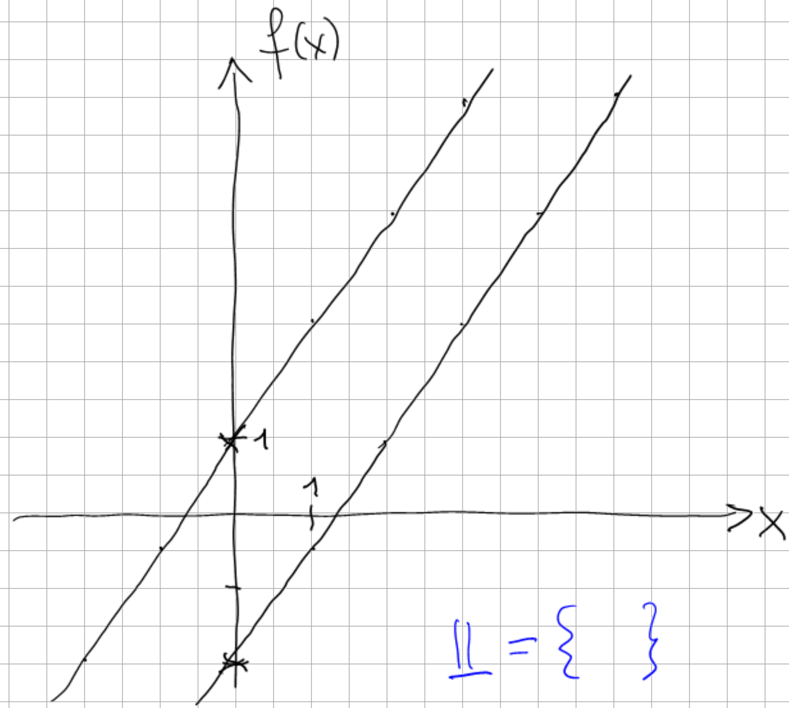
$$y = \frac{3}{2}x - 2$$

$$y = \frac{3}{2}x + 1$$

- gleiche Steigung, also Geraden parallel
- verschiedene Ordinatenabschnitte,

also Geraden nicht identisch

Daher: kein gemeinsamer Punkt



$\mathbb{L} = \{ \; \}$

3. Fall:

$$4x + 2y = 3$$

$$-28x - 14y = -21$$

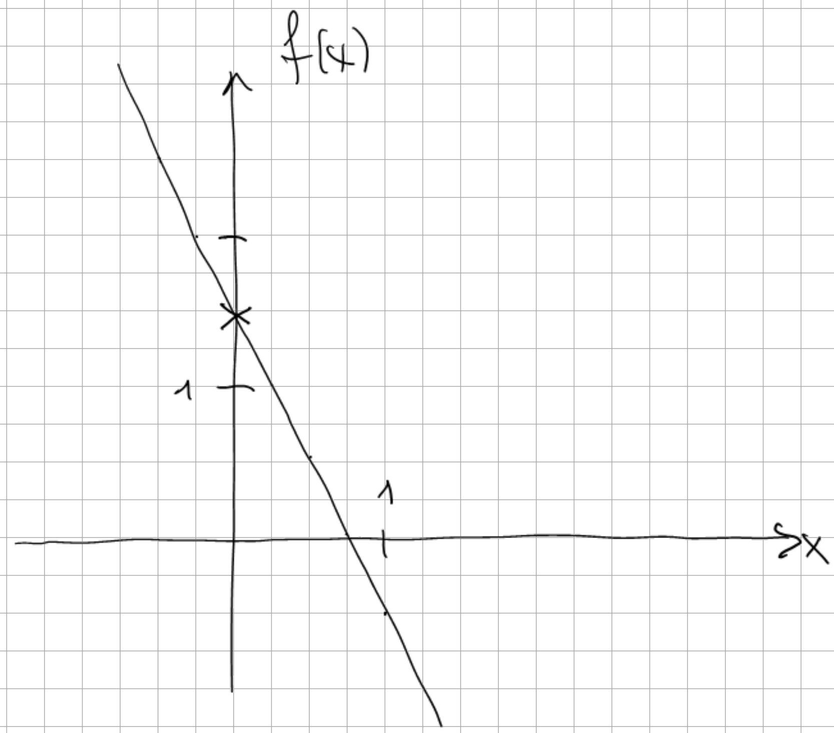
Auflösen nach y liefert

$$y = -2x + \frac{3}{2}$$

$$y = -2x + \frac{3}{2}$$

identische Geraden

daher unendlich viele gemeinsame Punkte

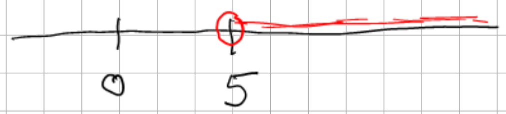


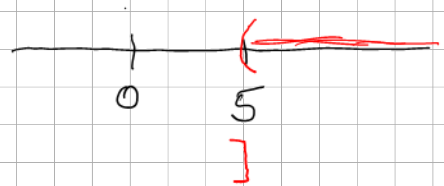
$$\mathbb{L} = \{x, y \in \mathbb{R} \mid y = -2x + \frac{3}{2}\}$$

3.2 Lineare Ungleichungen

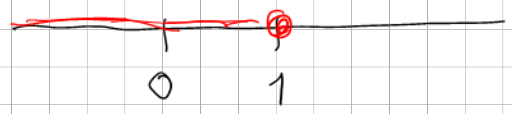
3.2.1 Grundlagen und Äquivalenzumformungen

$x > 5 \qquad x \in \mathbb{R}$

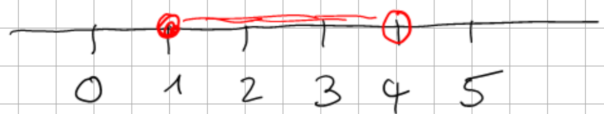




$x \le 1$

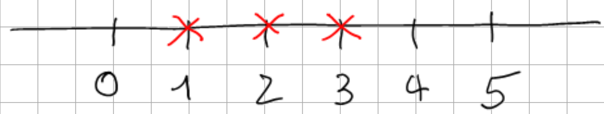


$1 \le x < 4 \qquad x \in \mathbb{R}$

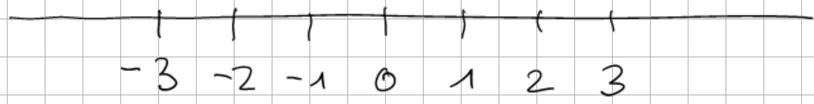


$\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \le x < 4\}$

$1 \le x < 4 \qquad x \in \mathbb{N}$



$\{1, 2, 3\}$



$$1 < 2 \quad | \cdot (-1)$$
$$-1 > -2$$

$$2 < 3 \qquad -2 > -3 \qquad -2 < 3$$
$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} \qquad -\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} \qquad -\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$$

Ungleichungszeichen umdrehen bei Kehrwertbildung

Ungleichungszeichen bleibt erhalten

Äquivalenzumformungen

$$4x - 2 < x + 7 \quad | +2$$
$$4x < x + 9 \quad | -x$$
$$3x < 9 \quad | :3$$
$$x < 3$$

Aber:

$$-4x - 2 < -x + 7 \quad | +2+x$$
$$-3x < 9 \quad | :(-3)$$
$$x > -3$$

Multiplikation mit oder Division durch negative Zahlen fordert:
Ungleichungszeichen umdrehen

Beispiel:

Wenn man zum Drittel einer Zahl 1 addiert, so erhält man mehr als wenn man vom Vierfachen dieser Zahl 5 subtrahiert und das Ergebnis halbiert.

$$\frac{1}{3}x + 1 > \frac{4x-5}{2} \quad | \cdot 2$$

$$\frac{2}{3}x + 2 > 4x - 5 \quad | -2$$

$$\frac{2}{3}x > 4x - 7 \quad | -4x$$

$$-\frac{10}{3}x > -7 \quad | : \left(-\frac{10}{3}\right)$$

$$x < \frac{21}{10}$$

3.2.2 Ungleichungen mit Parameter

$y > 0$ erfüllt für positive y

$-z > 0$ erfüllt für negative z

Gesucht: x, $x \in \mathbb{R}$

$4 + a(x+3) < 7$ mit $a \in \mathbb{R}$, beliebig

$4 + ax + 3a < 7 \quad | -4$

$ax + 3a < 3 \quad | -3a$

$ax < 3 - 3a$

1. Fall: $a = 0 \Rightarrow ax < 3 - 3a$ wird zu $0 < 3$

$4 + a(x+3) < 7$ wird zu $4 < 7$

$\Rightarrow \mathbb{L}_1 = \{ x \in \mathbb{R} \mid a = 0 \}$

2. Fall: $a > 0$ $\qquad ax < 3 - 3a \quad | : a$

$$x < \frac{3}{a} - 3$$

$$\mathbb{L}_2 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{3}{a} - 3,\ a > 0,\ a \in \mathbb{R} \right\}$$

3. Fall: $a < 0$ $\qquad ax < 3 - 3a \quad | : a$

$$x > \frac{3}{a} - 3$$

$$\mathbb{L}_3 = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{a} - 3,\ a < 0,\ a \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3$$

3.2.3 Lineare Ungleichungen mit 2 Unbekannten

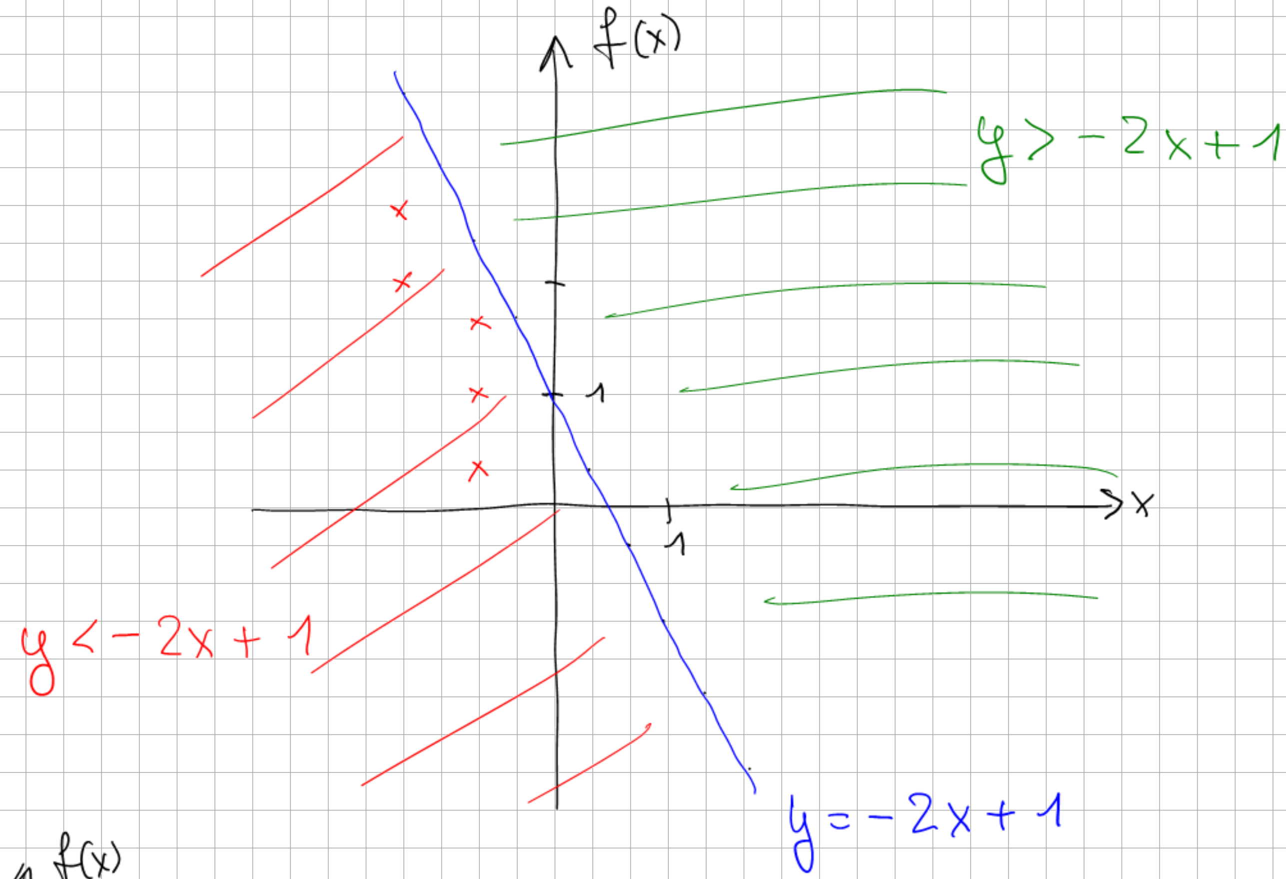
$f(x) = -2x + 1$ Gerade

$y = -2x + 1$

Ungleichung

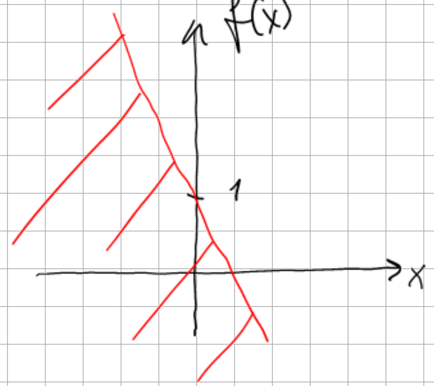
$y < -2x + 1$

$y > -2x + 1$



$y \leq -2x + 1$

Gerade ist Teil
der Lösungsmenge



Aufgaben

Skript Nr. 40

Bitte zuletzt bearbeiten

Zusatzdokument Kap. 3.1 3.1.2 Nr. 6+7, 9+10

3.1.3 Nr. 3+4

Kap. 3.2 Teil 1: Nr. 1–6, 8a+b

Teil 2: Nr. 8c+d